**B.P. Geghamyan**

# OPTIMAL CHOIS OF MATERIAL FOR CILINDRICAL INHOMOGENEOUS SHELLS

*The article considers the problem of optimal design of inhomogeneous orthotropic cylindrical shells. Coefficients of elasticity and density of the shell material are variable. We consider the case where both the elasticity coefficients and the density depend on the same function, with correspondingly different multipliers of precision. That function is the optimal design control parameter. The objective functional in the problem is the mass of the shell. To solve the problem, uncertain Lagrange multipliers are introduced and an extended objective function is constructed. Using the extremum variational principle of functionals, a system of nonlinear differential equations is obtained, which, together with the boundary conditions, constitutes a necessary condition for optimality.*

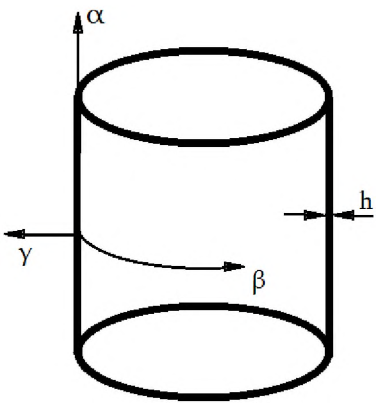
*Problems of this kind, in addition to their theoretical significance, are also of great practical importance. These problems will be of particular importance in the design, development and production of wear parts and assemblies of technical equipment necessary for rescue operations in emergency situations, as well as in order to reduce costs and increase service life, which is directly related to the problem under consideration.*

***Key words:*** *membrane, optimal, design, inhomogeneous, orthotropic, mass, functional, variational, elasticity, coefficient*

Consider an axisymmetric thin-walled cylindrical orthotropic shell, the material of which is inhomogeneous. The shell oscillates freely with a given fundamental frequency. We will formulate the optimal design problem:

Find the law that characterizes the inhomogeneity of the shell material, under which free vibrations occur at a given value of the fundamental frequency, and the shell mass receives the smallest value.

The target functional in the problem is the mass of the shell, which is determined by the following formula:




$$(\alpha) = \int_0^l \rho(\alpha) d\alpha \tag{1}$$

As a result of an external force action (X, Y, Z ), forces (T1, T2, S12) and moments (M1, M2, H) appear in the shell, which are expressed by tensor components of relative deformations (ε1, ε2, τ, к1), and the latter are the displacement components of the points of the middle surface of the shell [1]:

$$T_1 = C_{11} \cdot \varepsilon_1 + C_{12} \cdot \varepsilon_2 \ , \ T_2 = C_{12} \cdot \varepsilon_1 + C_{22} \cdot \varepsilon_2 \ ,$$
$$H = D_{66} \cdot \tau \ ,$$
$$S_{12} = C_{66} \cdot \omega + \frac{1}{R} \cdot D_{66} \cdot \tau \ , \ M_1 = D_{11} \cdot \kappa_1 \ , \ M_2 = D_{12} \cdot \kappa_1$$

(2)

Here $C_{ij} = h \cdot B_{ij}$ , $D_{ij} = \frac{h^3}{12} \cdot B_{ij}$ are stiffness coefficients, *Bij* are elasticity coefficients.

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{d\alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{v}{R}, \quad \omega = \frac{dv}{d\alpha}, \quad \kappa_1 = -\frac{d^2 w}{d\alpha^2}, \quad \tau = \frac{2}{R} \cdot \frac{dv}{d\alpha} \tag{3}$$

The forces arising in the shell, bending and torsional moments, shear forces satisfy the equations of motion of the shell points or the equilibrium equations [1]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} = -X, \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \cdot N_2 = -Y, \quad \frac{T_2}{R} - \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} = Z, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} = N_1, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = N_2 \tag{4}$$

The relations (3) are also true when (X, Y, Z) are inertial forces.

The thickness of the shell under consideration is constant, and all elasticity coefficients are variable and depend on the coordinate α according to the same law with the accuracy of a constant multiplier:

$$h = const, \ B_{ij} = B_{ij}^{o} \cdot \xi(\alpha), B_{ij}^{o} = const \tag{5}$$

From these relations, a system of shell equilibrium equations is derived, separable by the time coordinate t. From this system, the following system of equations is obtained with respect to the components u(α), v(α), w(α) of the displacements of the points of the median surface of the shell (fig. 1):

$$\begin{cases} \frac{d}{d\alpha}\left(C_{11}\frac{du}{d\alpha} + C_{12}\frac{w}{R}\right) = -\rho(\alpha) \cdot h \cdot u \cdot \omega_0^2 \\ \frac{d}{d\alpha}\left(\left(C_{66} + \frac{4}{R^2}D_{66}\right) \cdot \frac{dv}{d\alpha}\right) = -\rho(\alpha) \cdot h \cdot v \cdot \omega_0^2 \\ \frac{1}{R}\left(C_{12}\frac{du}{d\alpha} + C_{22}\frac{w}{R}\right) + \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(D_{11}\frac{d^2 w}{d\alpha^2}\right) = \rho(\alpha) \cdot h \cdot w \cdot \omega_0^2 \end{cases} \tag{6}$$

The system of equations (6) describes the free vibrations of the shell, where the value of the fundamental frequency of the natural vibrations of the shell is denoted by $\omega_0$.

The components u, v, v of the displacements of the points of the middle surface of the shells performing free vibrations must also satisfy the boundary conditions. Here we will consider the following boundary conditions [1]:

I. Free edge

$$T_1=0, \ S_{12} = 0, \ M_1 = 0, \ N_1 = 0 \tag{7}$$

II. Hinged edge

$$u = 0, \ v = 0, \ w = 0, \ M_1 = 0 \tag{8}$$

III. Hinged edge free in the tangential direction

$$T_1=0, \ v = 0, \ w = 0, \ M_1 = 0 \tag{9}$$

The considered boundary condition must be satisfied along the given coordinate line $\alpha = \alpha_0$. It is assumed that the density of the studied shells is variable and also depends on the function $\xi(\alpha)$:

$$\rho(\alpha) = \rho_o \cdot \xi(\alpha), \ \rho_o = const \tag{10}$$

In this case, the target functional (1) is given by the following formula:

$$J(\alpha) = \int_0^l \rho(\alpha) d\alpha \tag{11}$$

It can be seen that system (6) would be separable variables with respect to the variables (u, w) and v if the orthotropic shell of constant thickness were made of a homogeneous material, and in the case of inhomogeneity given by relations (5) and (10), the system ( 6) will not be separable variables.

To solve this problem, we apply the variational principle of the extremum of the functional. By introducing the indefinite Lagrange multipliers λ1(α), λ2(α), λ3(α), we form an extended functional J(α):

$$J(\alpha) = \int_0^l (\rho_0 \cdot \xi(\alpha) + \lambda_1(\alpha)\Big( \frac{d}{d\alpha}\left(B_{11}^0 \frac{du}{d\alpha} + B_{12}^0 \frac{w}{R}\right) \cdot \xi(\alpha) \cdot h + \rho_0 \cdot \xi(\alpha) \cdot h \cdot u \cdot \omega_0^2\Big) + \\ +\lambda_2(\alpha)\left(\frac{d}{d\alpha}\left(\left(B_{66}^0 + \frac{h^2}{3 \cdot R^2} B_{66}^0\right) \cdot \xi(\alpha) \cdot h \cdot \frac{dv}{d\alpha}\right) + \rho_0 \cdot \xi(\alpha) \cdot h \cdot v \cdot \omega_0^2\right) + \lambda_3(\alpha)\Big(\frac{1}{R}\Big(B_{12}^0 \frac{du}{d\alpha} + \\ +B_{22}^0 \frac{w}{R}\Big) \cdot \xi(\alpha) + \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(B_{11}^0 \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \cdot \xi(\alpha)\right) - \rho_0 \cdot \xi(\alpha) \cdot h \cdot w \cdot \omega_0^2\Big)) d\alpha \tag{12}$$

In the case of an increment of the control parameter $\xi(\alpha)$ by $\delta\xi$, the components of the displacements of points *u, v* and *w* receive increments respectively $\delta u$, $\delta v$ and $\delta w$. These increments satisfy the equations of motion (6), and the functional $J(\alpha)$ will receive the corresponding increment $\delta J(\alpha)$. According to the principle of variation [2, 3].

$$\delta J(\alpha) = 0 \tag{13}$$

Four equations are obtained from condition (13), from which the indefinite factors $\lambda_1(\alpha)$, $\lambda_2(\alpha)$, $\lambda_3(\alpha)$ can be excluded and only one equation can be obtained:

$$B_{11}^0 \cdot \left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 + 2 \cdot B_{12}^0 \frac{du}{d\alpha} \cdot \frac{w}{R} + B_{66}^0 \cdot \left(\frac{dv}{d\alpha}\right)^2 + B_{22}^0 \cdot \frac{w^2}{R^2} + \frac{B_{11}^0 \cdot h^2}{12} \cdot \left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2}\right)^2 = c + \rho_0 \cdot \omega_0^2 \cdot u^2 + +\rho_0 \cdot \omega_0^2 \cdot v^2 + \rho_0 \cdot \omega_0^2 \cdot w^2$$

$$c = const \tag{14}$$

*c* is an arbitrary constant, since we consider shells that perform free vibrations, and with free vibrations, the displacement components *u(α), v(α), w(α)* are determined by the accuracy of the constant factor, as eigenfunctions. Equation (14) together with system (6) and boundary conditions are necessary conditions for the optimality of the problem.

The left side of equation (14) is the derivative of the potential energy of the shell deformation with respect to the control parameter, and the right side is the sum of the derivative of the kinetic energy and the derivative of the objective intra-integral function:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial K}{\partial \xi} \tag{15}$$

where

$$f(\xi) \equiv \rho_o\, \xi(\alpha) \tag{16}$$

Apparently, this pattern can be applied to problems of a different nature of optimal design of structures, which will greatly facilitate the process of solving these problems.

In the article [4], a problem of designing optimal rods performing longitudinal vibrations was considered. Analytical solutions were obtained there, according to which the optimal thickness and the displacement function of the points corresponding to it are hyperbolic functions.

An analytical solution was not found for the problem considered here, which is why numerical solution methods should be applied.

## References


1. **Ambartsumian S. A.** Fragments of the Theory of Anisotropic Shells. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1991. - 215 p.
2. **Geghamyan B. P.** Some Problems of Optimal Design of Anisotropic Inhomogeneous Plates and Shells. Dissertation for the degree of Candidate of Physics. Math. of Sciences Y., 1985.-134 p.
3. **Banichuk N. V.** Introduction to optimization of structures M., Nauka, 1986. - 302 p.
4. **Geghamyan B. P.** Design of optimal rods performing longitudinal vibrations. European University, Collection of Scientific Articles. N 11(02). Y., 2020. P. 485-49.



**Բ.Պ. Գեղամյան**


## ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՆՅՈՒԹԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԸՆՏՐՈՒԹՅՈՒՆ


*Հոդվածում դիտարկվում են անհամասեռ օրթոտրոպ գլանային թաղանթների օպտիմալ նախագծման խնդիր: Առաձգականության գործակիցները և թաղանթի նյութի խտությունը փոփոխական են: Դիտարկվում է այնպիսի դեպք, երբ և առաձգականության գործակիցները, և խտությունը կախված են նույն ֆունկցիայից, համապատասխան տարբեր բազմապատկիչների ճշտությամբ: Այդ ֆունկցիան օպտիմալ նախագծման ղեկավարման պարամետրն է: Խնդրում նպատակի ֆունկցիոնալը թաղանթի զանգվածն է: Խնդրի լուծման համար ներմուծվում են Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչներ և կառուցվում է նպատակի ընդլայնված ֆունկցիոնալ: Օգտվելով ֆունկցիոնալների էքստրեմումի վարիացիոն սկզբունքից, ստացվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որը եզրային պայմանների հետ միասին կազմում է օպտիմալության անհրաժեշտ պայման:*

*Այս բնույթի խնդիրները տեսական կարևորությունից բացի ունեն նաև կիրառական կարևոր նշանակություն: Այդ խնդիրներն առանձնակի կարևորություն կունենան արտակարգ իրավիճակներում փրկարարական աշխատանքներ կատարելու համար անհրաժեշտ տեխնիկական միջոցների շուտ մաշվող դետալների ու հանգույցների նախագծման, մշակման և արտադրման ժամանակ, ինչպես նաև ծախսերը փոքրացնելու և շահագործման ժամկետները մեծացնելու նպատակով, ինչն անմիջականորեն առնչվում է դիտարկվող խնդրին:*

***Առանցքային բառեր.*** *թաղանթ, օպտիմալ, նախագծում, անհամասեռ, օրթոտրոպ, զանգված, ֆունկցիոնալ, վարիացիոն, առաձգականություն, գործակից:*

**Б.П. Гегамян**

# ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР МАТЕРИАЛА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК

*В статье рассматривается задача оптимального проектирования неоднородных ортотропных цилиндрических оболочек. Коэффициенты упругости и плотность материала оболочек являются переменными. Мы рассматриваем случай, когда и коэффициенты упругости, и плотность зависят от одной и той же функции с точностью соответствующих разных множителей. Эта функция является параметром управления оптимального проектирования. В задаче функционалом целы является масса оболочек. Для решения задач вводятся неопределенные множители Лагранжа и строится расширенный функционал целы. С помощью вариацонного принципа экстремума функционалов получена система нелинейных дифференциальных уравнений, которая вместе с граничными условиями составляет необходимые условия оптимальности.*

*Задачи такого рода, помимо их теоретического значения, имеют и большое практическое значение. Эти проблемы будут иметь особое значение при проектировании, разработке и производстве изнашиваемых деталей и узлов технических средств, необходимых для аварийно-спасательных работ в чрезвычайных ситуациях, а также в целях снижения затрат и увеличения срока службы, что непосредственно связано с рассматриваемой проблемой.*

***Ключевые слова:*** *оболочка, оптимальный, проектирование, неоднородный, ортотропный, масса, функционал, вариационный, упругий, коэффициент.*

**Geghamyan Bagrat Paruyr** - physical-math. science candidate, Associate Professor (YSU, CMSA, MIA RA).

*Presentation date: 21.03.2023*
*Review date: 24.03.2023*